Luogo delle Radici

Andrea Gasparri

Il luogo delle radici è un diagramma che mostra come si spostano i poli di un sistema dinamico lineare stazionario a singolo ingresso e singola uscita (SISO) al variare di un parametro. È stato ideato nel 1948 da Walter R. Evans.

1 Luogo Esatto

Definizione 1 *Il luogo delle radici è un procedimento grafico che permette di valutare le prestazioni di un sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno K del controllore $C(s)$ in catena diretta. Il ramo positivo è il luogo delle radici ottenuto per $K \in [0, +\infty)$ Il ramo negativo è il luogo delle radici ottenuto per $K \in (-\infty, 0]$ Il ramo completo è il luogo delle radici ottenuto per $K \in (-\infty, +\infty)$ (ovvero l'unione del luogo positivo e negativo)*

Si consideri ad esempio un processo descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{1}{s \cdot (s - p)} \tag{1}$$

La funzione di trasferimento a ciclo chiuso considerando $C(s) = K$ e $H(s) = 1$ risulta:

$$W(s) = \frac{K}{s^2 - p\,s + K} \tag{2}$$

Il polinomio caratteristico è :

$$f(s, K) = s^2 - p\,s + K \tag{3}$$

Di conseguenza poichè il $\Delta = p^2 - 4 \cdot K$ avremo tre casi possibili per le radici al variare di K:

$$\begin{aligned} \Delta = 0 \quad &\rightarrow \quad K = \frac{p^2}{4} \\ \Delta > 0 \quad &\rightarrow \quad K < \frac{p^2}{4} \\ \Delta < 0 \quad &\rightarrow \quad K > \frac{p^2}{4} \end{aligned} \tag{4}$$

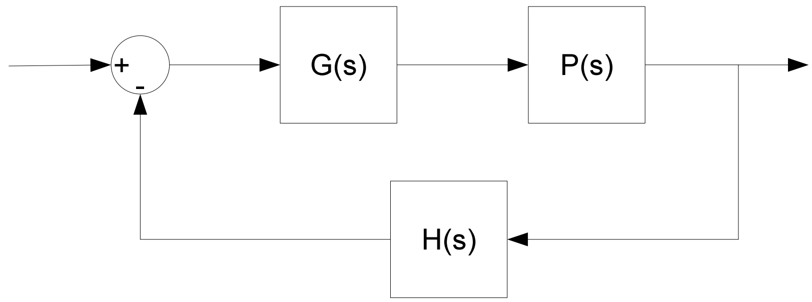

Figura 1: Tipico sistema di controllo in retroazione dove $P(s)$ è il processo da controllare, $G(s)$ è il controllore ed $H(s)$ è la funzione di trasferimento del trasduttore.

Si consideri un generico processo descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} \tag{5}$$

Si costruisca un sistema in retroazione come indicato nella figura 1. La funzione di trasferimento a ciclo chiuso considerando $G(s) = K$ and $H(s) = 1$ risulta:

$$W(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i) + K \cdot \prod_{i=1}^{m}(s - z_i)} \tag{6}$$

Osservando il polinomio caratteristico:

$$f(s,k) = \prod_{i=1}^{n}(s - p_i) + K \cdot \prod_{i=1}^{m}(s - z_i) \tag{7}$$

si nota che:

- Poli della $W(s)$ dipendono dal guadagno K, dal numeratore $N(s)$ e dal denominatore $D(s)$ del processo $P(s)$
- Nel caso $K = 0$ i poli della $W(s)$ sono esattamente i poli della $P(s)$

A partire dalla condizione $f(s,k) = 0$ è possibile definire le due equazioni fondamentali per il tracciamento esatto del luogo delle radici. In particolare, dalla $f(s,k) = 0$ si ottiene la seguente forma esplicita del guadagno K:

$$K = -\frac{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)} \tag{8}$$

da cui si ottengono le seguenti equazioni:

- Equazione di Tracciamento

$$\angle K = \pi + \sum_{i=1}^{n} \angle(s - p_i) - \sum_{i=1}^{m} \angle(s - z_i) + 2h\pi \tag{9}$$

- Equazione di Taratura

$$\mid K \mid = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mid (s - p_i) \mid}{\prod_{i=1}^{m} \mid (s - z_i) \mid} \tag{10}$$

Osservazioni:

- L'equazione del tracciamento, eq. (9), fonisce una condizione per la verifica della appartenza dei punti del piano complesso $\mathcal{C}$ al luogo delle radici.
- L'equazione di taratura, eq. (10) fornisce una condizione per determinare l'esatto valore del guadagno $\bar{K}$ per cui si ha un determinato polo $\bar{s}$.

2 Luogo Approssimato

Nella sezione precedente sono state introdotte le due equazioni fondamentali per il tracciamento esatto del luogo delle radici, (eq. (9) e (10)). Un impiego diretto di tali equazioni richiederebbe l'ispezione di tutti i punti del piano complesso limitandone di fatto un possibile utilizzo pratico. Tuttavia a partire da queste equazioni è possibile derivare una serie di regole che permettono il traccimento del luogo delle radici in maniera qualitativa.

- R1 Il luogo delle radici è costituito da $2n$ rami (n rami positivi e n rami negativi)
- R2 Gli n rami completi passano per $K = 0$ per i poli della $P(s)$
- R3 L'asse reale appartiente al luogo delle radici ad eccezione di eventuali zeri del sistema a ciclo aperto. In particolare:
  - Un generico punto $p \in$ ramo positivo se lascia alla propria destra un numero dispari (ad esclusione del punto improprio) di poli e zeri contati con le loro molteplicità.
  - Un generico punto $p \in$ ramo negativo se lascia alla propria destra un numero pari (ad esclusione del punto improprio) di poli e zeri contati con le loro molteplicità.
- R4 Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale
- R5 Gli zeri del sistema a ciclo aperto $\notin$ luogo delle radici. In particolare:

$$\mid K \mid \rightarrow \inf \begin{cases} \text{m rami tendono agli zeri della } P(s) \\ \text{n-m tendono al punto impropio } (\infty) \end{cases}$$

Di consequenza, il punto improprio può essere interpretato come un particolare zero

- R6 I $2(n-m)$ rami che tendono al punto improprio vi tendono secondo $2(n-m)$ asintoti che dividono l'angolo giro in parti uguali. Le semirette che costituiscono gli asintoti formano una stella la cui origine è:

$$S_0 = \frac{\sum_i^n p_i - \sum_i^m z_i}{n-m} \tag{11}$$

  Il segno degli asintoti (positivo/negativo) è alternato e la semiretta $[S_0, +\infty)$ è un asintoto del ramo negativo.

- R7 Il luogo delle radici può avere al massimo un numero di punti singolari pari a $n+m-1$. Tali punti possono essere identificati in forma chiusa attraverso la:

$$\sum_i^m \frac{1}{(s-z_i)} - \sum_i^n \frac{1}{(s-p_i)} = 0 \tag{12}$$

- R8 Se p_0 è un punto di singolarità di molteplicità $\nu-1$, in esso vi confluiscono $2\,\nu$ segmenti del luogo i quali tendono al punto di singolarità secondo tangenti che spaziano l'angolo giro in parti uguali $\left(\frac{360°}{2\nu}\right)$

- R9 I poli di molteplicità ν sono punti di singolarità di molteplicità $\nu - 1$

- R10 Tra 2 poli (zeri) contigui ci può essere un numero dispari di punti di singolarità, mentre tra 1 polo (zero) e 1 zero (polo) contigui ci può essere un numero pari di punti di singolarità

Procedura sistematica per il tracciamento qualitativo del luogo

Data un processo descritto dalla $P(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)}$

- Calcolare l'eccesso poli zero $(n-m)$ ed il numero massimo ammissibile di punti di singolarità $(n+m-1)$.
- Tracciare i poli $\{p_1, \cdots, p_n\}$ e zeri $\{z_1, \cdots, z_m\}$ sul piano complesso. Individuare i tratti dell'asse reale che appartengono al luogo (per $K > 0$ e/o $K < 0$).
- Identificare il centrostella S_0 e tracciare gli asintoti.
- Identificare i punti di singolarità
- Effettuare l'analisi per $\mid K \mid \rightarrow \infty$
- Orientare il luogo

3 Sintesi

Nella sezione precedente è stata presentata una metodologia per il tracciamento qualitativo del luogo delle radici. In questa sezioni i concetti precedentemente presentati verranno impiegati ai fini della sintesi di un opportuno controllore in grado di stabilizzare a ciclo chiuso con retroazione unitaria un dato processo $P(s)$.

3.1 Sistemi a fase minima

Si consideri un processo $P(s) = \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$ dove $\{z_1, \dots, z_m\} \in \mathcal{C}^-$.

- Se il grado relativo del sistema è pari ad 1, ovvero $(n - m = 1)$, allora il sistema è sempre stabilizzabile per valori elevati del guadagno positivo $(K >> 0)$.

- Se il grado relativo del sistema è pari a 2, ovvero $(n-m = 2)$, allora vi sono 2 asintoti paralleli all'asse immaginario passanti per il centro stella S_0. Nel caso il centro stella $S_0 < 0$ è minore di zero, allora per la stabilizzazione è sufficiente un guadagno elevato . Nel caso il centro stella è maggiore di zero $S_0 > 0$ si deve ricorrere ad una funzione compensatrice del tipo:
$$R(s) = \frac{s - z}{s - p} \tag{13}$$
la quale non altera il numero di asintoti ma permette di spostare il centro stella come segue:
$$\bar{S}_0 = S_0 + \frac{(p - z)}{2} \tag{14}$$
a questo punto la stabilità è garantita da un guadagno K sufficientemente elevato.

- Se il grado relativo del sistema è maggiore di 2, ovvero $(n - m > 2)$, allora si aggiungono preliminarmente $n - m - 2$ zeri a parte reale negativa, e si determini una rete compensatrice come nel caso precedente. Si noti che il sistema così ottenuto è, in accordo a quanto detto precedentemente, stabilizzabile. Tuttavia, il controllore:
$$G(s) = K\,\frac{s + z}{s + p}\,(s + z_i)\,\dots(s + s_{n-m-2}) \tag{15}$$
risulta essere fisicamente non realizzabile. Per ovviare a tale problema è sufficiente aggiungere $n-m-2$ poli del tipo $(1+T_i s)$ con $T_i > 0$ molto piccolo. È infatti possibile dimostrare attraverso il criterio di Nyquist che tale l'aggiunta di tali termini non altera la stabilità del sistema. Infatti, si ha che l'aggiunta di un polo ad alta frequenza altera i diagrammi di Bode solo attorno all'origine quando si è sufficientemente lontani dal punto critico $(-1, 0)$.

3.2 Sistemi a fase non minima

Si consideri un processo $P(s) = \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$ dove $z_i \in \mathcal{C}^+$ per qualche i.

- Se il processo $P(s)$ è stabile (tutti i poli della $P(s)$ sono a parte reale negativa), allora il sistema in anello chiuso risulta stabilizzabile per valori sufficientemente piccoli del guadagno K.
- Se il processo $P(s)$ ha un polo a parte reale positiva, allora vi sono due possibili casi. Se il polo è alla sinistra dello zero, allora per valori $K_1 < K < K_2 < 0$ opportuni il sistema a ciclo chiuso risulta stabile. Se il polo è alla destra dello zero, si aggiunge un altro polo alla destra del polo già esistente, allora il sistema a ciclo chiuso risulterà stabile per valori $0 < K_1 < K < K_2$ opportuni.